Bilokale Feldtheorie der Elementarteilchen

F. Vollendorf

(Z. Naturforsch. **30 a**, 891–895 [1975]; eingegangen am 22. Mai 1975)

Bilocal Field Theory of Elementary Particles

The basic idea of this article is that in a bilocal field theory the Lorentz group can be replaced by the larger group SO(4; 4) which contains SO(3; 1) as a subgroup. On this basis a system of 24 coupled differential equations is introduced.

In the special case of the pion the connection with the local field theory is discussed. It turns out that the application of the local field theory is limited by the reduced Compton wave length $\lambda/2\,\pi$ of the pion.

1. Einleitung

Zwei vorangegangene Arbeiten (I) [1] und (II) [2] führten zu den folgenden Ergebnissen:

Zunächst [1] zeigte sich eine enge Beziehung zwischen den internen Symmetrien der Elementarteilchen und einer linearen Algebra $\mathbb{C}^{24}$, welche sich mit Hilfe des (nicht assoziativen) Rings $\mathbb{C}^{8}$ der Cayley-Zahlen aufbauen ließ. Weiterhin [2] konnte nachgewiesen werden, daß sich metrische Eigenschaften des Raumzeitkontinuums und damit das Gravitationsfeld zumindest im Falle der Schwarzschildschen Metrik mit Hilfe der Menge R^8 aller reellen Cayley-Zahlen beschreiben lassen.

Diese beiden Ergebnisse führen nun zu einer Feldtheorie, deren Grundlage ein System von 24 nichtlinear miteinander gekoppelten bilokalen Differentialgleichungen bildet.

2. Feldfunktionen

Der Begriff der Feldfunktion ist grundlegend für jede (klassische) Feldtheorie. Durch eine Feldfunktion F wird jedem Raumzeitpunkt X mit den Koordinaten x_ν ein Element $F_{(x_\nu)}$ einer Menge V zugeordnet, wobei V bezüglich geeigneter Verknüpfungen mindestens einen linearen Vektorraum $\mathbf{V}$ bildet. F kann demnach auch als eine Abbildung des Raumzeitkontinuums in die Elementmenge V eines Vektorraumes $\mathbf{V}$ angesehen werden.

Wird nun das Kontinuum aller Raumzeitpunkte durch die Mannigfaltigkeit $\hat{\mathsf{R}}^8$ aller geordneten Paare von Raumzeitpunkten X und Y mit den Koordinaten x_ν bzw. y_ν ersetzt, so führt eine konsequente Erweiterung des Begriffs einer Feldfunktion dazu, Abbildungen von $\hat{\mathsf{R}}^8$ in eine geeignete Menge V zu betrachten. Formalmathematisch gesehen wird man hiermit auf die allgemeinen Voraussetzungen geführt, welche die Grundlage zu einer kürzlich erschienenen Arbeit von Ardalan und Fleming [3] bilden.

Aufgrund der Ergebnisse aus II und I wird $\hat{\mathsf{R}}^8$ durch den Raum R^8 der reelen Cayley-Zahlen ersetzt und als Elementmenge des Vektorraumes $\mathbf{V}$ die Menge C^{24} gewählt. Diese Menge C^{24} bildet, wie in I gezeigt wurde, nicht nur einen über dem Körper $\mathbb{C}^1$ der komplexen Zahlen linearen Vektorraum, sondern sogar eine kommutative (nicht assoziative) lineare Algebra $\mathbb{C}^{24}$. In der aufzubauenden bilokalen Feldtheorie sind demnach Feldfunktionen A als Abbildungen von R^8 in C^{24} gegeben. Durch eine solche Abbildung A wird jeder reellen Cayley-Zahl

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\nu=0}^{3} u^\nu \beta^\nu + u_\nu \beta_\nu \tag{1}$$

mit $u^\nu,\ u_\nu \in \mathsf{R}^1$ (R^1: Menge der reellen Zahlen) ein Element $A_{(u)}$ aus C^{24} zugeordnet:

$$A : \boldsymbol{u} \mapsto A_{(u)}\,.$$

Die jeweils vier Werte der Koordinaten u^ν und u_ν legen dabei die Lage des Punktes X bzw. Y fest. Der Feldterm $A_{(u)}$ kann stets als ein Tripel der Form

$$A_{(u)} = (\psi_{(u)}\,,\ \Phi_{(u)}\,,\ \chi_{(u)}) \tag{2}$$

geschrieben werden, wobei die Werte der Terme $\psi_{(u)}$, $\Phi_{(u)}$ und $\chi_{(u)}$ Elemente der Menge C^8 aller (komplexen) Cayley-Zahlen sind.

3. Feldgleichungen

Typisch für eine Feldtheorie ist es, daß zur Beschreibung physikalischer Objekte solche Feldterme herangezogen werden, welche Lösungen einer im allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichung von

Sonderdruckanforderungen an Dr. F. Vollendorf, *D-3550 Marburg 7*, Clemens-Brentano-Str. 1.

höchstens zweiter Ordnung sind. Von der zu Grunde gelegten Differentialgleichung ist dabei zu fordern, daß sie gegenüber Lorentz-Transformationen forminvariant ist. Es stellt sich damit zunächst das Problem, für die im letzten Abschnitt eingeführten Feldterme $A_{(u)}$ eine Differentialgleichung zu formulieren. Zu diesem Zweck wird unter Benutzung einer reellen Konstante l der von rechts und links anwendbare Differentialoperator

$$\partial_{(u)} := (l/i) \sum_{\nu=0}^{3} (\partial/\partial u^\nu)\beta^\nu + (\partial/\partial u_\nu)\beta_\nu$$

eingeführt.

Mit Hilfe der in I definierten Spur

$$\operatorname{Sp} \partial_{(u)} := \tfrac{1}{2}(\partial/\partial u^0 + \partial/\partial u_0)$$

kann der gespiegelte Operator $\partial^{\mathrm{P}}_{(u)}$ gebildet werden:

$$\partial^{\mathrm{P}}_{(u)} := 2 \operatorname{Sp} \partial_{(u)} - \partial_{(u)} .$$

Wendet man die beiden Operatoren $\partial_{(u)}$ und $\partial^{\mathrm{P}}_{(u)}$ nacheinander an, so kann man stattdessen auch den Operator

$$\| \partial_{(u)} \| := \partial^{\mathrm{P}}_{(u)} \partial_{(u)}$$

benutzen. Mit Hilfe der in I durch die Tab. 7 aufgeführten Rechenregeln für Cayley-Zahlen erhält man

$$\|\partial_{(u)}\| = -l^2 \sum_{\nu=0}^{3} (\partial/\partial u^\nu)(\partial/\partial u_\nu) . \tag{3}$$

Auf dieser Grundlage wird schließlich ein auf Feldterme der Form (2) anwendbarer Operator $D_{(u)}$ eingeführt:

$$D_{(u)} A_{(u)} := (\partial_{(u)} \chi^{\mathrm{P}}_{(u)} , \| \partial_{(u)} \| \Phi_{(u)}, \psi^{\mathrm{P}}_{(u)} \partial_{(u)}) .$$

Eine der einfachsten nichtlinearen Differentialgleichungen von höchstens zweiter Ordnung, welche mit den bereitgestellten Hilfsmitteln formuliert werden kann, lautet

$$D_{(u)} A_{(u)} = \tfrac{1}{2} A_{(u)} A_{(u)} . \tag{4}$$

Unter Benutzung der Definition (5) aus I kann Gl. (4) etwas ausführlicher als ein System von drei miteinander gekoppelten Gleichungen geschrieben werden:

$$[\partial_{(u)} - \Phi_{(u)}]\, \chi^{\mathrm{P}}_{(u)} = 0 , \tag{5 a}$$

$$\| \partial_{(u)} \| \Phi_{(u)} = \psi_{(u)} \chi_{(u)} , \tag{5 b}$$

$$\psi^{\mathrm{P}}_{(u)} [\partial_{(u)} - \Phi_{(u)}] = 0 . \tag{5 c}$$

4. Symmetrietransformationen

In einer relativistischen lokalen Feldtheorie sind die Feldtermwerte von den Koordinaten u^ν eines einzigen Punktes X des Raumzeitkontinuums abhängig. Wird der Raumzeit nun eine Minkowskische Metrik aufgeprägt, so wird man auf die Gruppe der Lorentz-Transformationen dadurch geführt, daß man untersucht, für welche linearen homogenen Abbildungen der Raumzeit auf sich das Minkowskische Abstandsdifferential ds invariant bleibt. Die Lorentz-Transformationen bilden daher Symmetrietransformationen der Minkowskischen Metrik. Eine Feldtheorie heißt nun relativistisch, wenn ihre Feldgleichungen bei den durch die Minkowskische Metrik festgelegten Symmetrietransformationen forminvariant sind. Die Erfahrung zeigt, daß gerade die grundlegenden Feldtheorien relativistische Theorien sind.

In einer bilokalen Feldtheorie sollte man völlig analog zum lokalen Fall vorgehen. Demnach muß zunächst der zu Grunde liegenden Mannigfaltigkeit R^8 eine Metrik aufgeprägt werden. Das ist in II durch Einführung des Begriffs einer verallgemeinerten Minkowskischen Metrik geschehen. Diese erweiterte Metrik wird durch ein Abstandsdifferential ds gegeben:

$$(\mathrm{d}s)^2 := \sum_{\nu=0}^{3} \mathrm{d}u^\nu\, \mathrm{d}u_\nu . \tag{6}$$

In einem zweiten Schritt ist die Symmetriegruppe zu dieser Metrik zu bestimmen. Zuletzt muß gezeigt werden, daß die Transformationen aus dieser Gruppe die Form der Feldgleichungen (4) unverändert lassen.

Zur Durchführung der letzten beiden Schritte wird die Menge U aller reellen Cayley-Zahlen a eingeführt, deren Determinante

$$\| a \| := a^{\mathrm{P}} a$$

den Wert 1 hat. Mit Hilfe einer solchen Cayley-Zahl a wird nun durch die Zuordnung

$$\hat{T}_{(a)} : u \mapsto \tilde{u}$$
$$\tilde{u} := a\, u\, a \tag{7}$$

eine lineare Abbildung von R^8 auf sich eingeführt. Für die Differentiale

$$\mathrm{d}u := \sum_{\nu=0}^{3} \beta^\nu\, \mathrm{d}u^\nu + \beta_\nu\, \mathrm{d}u_\nu$$

und

$$\mathrm{d}\tilde{u} := \sum_{\nu=0}^{3} \beta^\nu\, \mathrm{d}\tilde{u}^\nu + \beta_\nu\, \mathrm{d}\tilde{u}_\nu \tag{8}$$

ergibt sich damit

$$d\tilde{u} = a(du)a\,. \tag{9}$$

Zu (7) und (9) ist zu bemerken, daß die Werte der rechten Seiten dieser Gleichungen trotz der Nichtassoziativität des Rings $\mathfrak{C}^8$ eindeutig bestimmt sind. Es gilt nämlich der folgende nützliche Satz, welcher im wesentlichen ein Spezialfall eines Satzes von Artin [4] ist.

Satz: Es sei $\mathsf{C}^8_{[a,b]}$ die kleinste gegenüber der Addition, der Multiplikation und der Spiegelung P abgeschlossene Menge, welche die Elemente a und b aus C^8 enthält. Dann bildet $\mathsf{C}^8_{[a,b]}$ bezüglich der Addition und Multiplikation einen assoziativen Ring.

Aus diesem Satz ergeben sich für $a, b, c \in \mathsf{C}^8$ die folgenden drei Moufang-Identitäten [5]:

$$(a\,b\,a)c = a[b(a\,c)]\,, \tag{10 a}$$

$$a(b\,c)a = (a\,b)\,(c\,a)\,, \tag{10 b}$$

$$c(a\,b\,a) = [(c\,a)b]a\,. \tag{10 c}$$

Mit den angegebenen mathematischen Hilfmitteln erhält man aus (9) unter Beachtung der Bedingung $a \in \mathsf{U}$ die Beziehung

$$\| d\tilde{u} \| = \| du \|\,.$$

Die Gln. (8) liefern hiermit nach einer Rechnung unter Benutzung der Tab. 7 aus I das Ergebnis

$$\sum_{\nu=0}^{3} d\tilde{u}^\nu\, d\tilde{u}_\nu = \sum_{\nu=0}^{3} du^\nu\, du_\nu\,.$$

Ein Vergleich mit (6) zeigt, daß bei allen Transformationen der Form (7) das Quadrat

$$(ds)^2 = \| du \|$$

des Abstandsdifferentials ds invariant bleibt.

Als Grundlage für die weitere Betrachtung wird nun die kleinste Gruppe $\mathbf{G}^0$ eingeführt, deren Elementmenge G^0 mindestens alle Transformationen $\hat{T}_{(a)}$ der Form (7) mit $a \in U$ umfaßt.

Jedes Element aus G^0 ist demnach eine lineare homogene Abbildung von R^8 auf sich, bei welcher das Abstandsdifferential ds invariant bleibt. Aus (6) läßt sich daher ablesen, daß $\mathbf{G}^0$ zu einer Untergruppe von SO(4/4) isomorph ist. Eine Untersuchung der zu $\mathbf{G}^0$ gehörenden Lie-Algebra zeigt, daß $\mathbf{G}^0$ zur zusammenhängenden Komponente $\mathrm{SO}^0(4/4)$ der Gruppe SO(4/4) isomorph ist.

5. Forminvarianz der Feldgleichungen

Es sei a ein Element aus U. Für die Differentialoperatoren $\partial_{(u)}$ und $\partial_{(\tilde{u})}$ folgt aus (7) und den Eigenschaften der partiellen Ableitungen die Beziehung

$$\partial_{(u)} = a\,\partial_{(\tilde{u})}\,a\,.$$

Setzt man die rechte Seite dieser Gleichung in das System (5) ein, so ergibt sich bei Benutzung der Moufang-Identitäten (10) nach einer Umformung das folgende System:

$$[\partial_{(\tilde{u})} - a^{\mathrm{P}}\,\Phi_{(u)}\,a^{\mathrm{P}}]\;[\chi_{(u)}\,a^{\mathrm{P}}]^{\mathrm{P}} = 0\,, \tag{11 a}$$

$$\| \partial_{(\tilde{u})} \|\, a^{\mathrm{P}}\,\Phi_{(u)}\,a^{\mathrm{P}} = [a^{\mathrm{P}}\,\psi_{(u)}]\,[\chi_{(u)}\,a^{\mathrm{P}}]\,, \tag{11 b}$$

$$[a^{\mathrm{P}}\,\psi_{(u)}]^{\mathrm{P}}\,[\partial_{(\tilde{u})} - a^{\mathrm{P}}\,\Phi_{(u)}\,a^{\mathrm{P}}] = 0\,. \tag{11 c}$$

Man liest unmittelbar ab, wie zu jedem Element a aus U eine Transformation $T_{(a)}$ der Feldterme $A_{(u)}$ anzusetzen ist, bei deren Durchführung sich die Form der Feldgleichungen (5) nicht ändert:

$$T_{(a)}: A_{(u)} \mapsto \tilde{A}_{(\tilde{u})}\,, \tag{12}$$

$$\tilde{u} := a\,u\,a\,, \tag{13}$$

$$\tilde{A}_{(\tilde{u})} := (a^{\mathrm{P}}\,\psi_{(u)},\, a^{\mathrm{P}}\,\Phi_{(u)}\,a^{\mathrm{P}},\; \chi_{(u)}\,a^{\mathrm{P}})\,. \tag{14}$$

Hiermit lassen sich die Gln. (11) wieder kurz zusammenfassen:

$$D_{(\tilde{u})}\,\tilde{A}_{(\tilde{u})} = \tfrac{1}{2}\,\tilde{A}_{(\tilde{u})}\,\tilde{A}_{(\tilde{u})}\,.$$

Es sei nun $\mathbf{G}$ die kleinste Gruppe, deren Elementmenge G mindestens alle Transformationen $T_{(a)}$ der Form (12) mit $a \in \mathsf{U}$ umfaßt. Dann ergibt sich unmittelbar, daß die Feldgleichungen (4) gegenüber allen Transformationen aus G forminvariant sind. Aus (14) läßt sich ablesen, daß durch $\psi_{(u)}$ und $\chi_{(u)}$ jeweils ein (bilokales) Spinorfeld und durch $\Phi_{(u)}$ ein bilokales Vektorfeld beschrieben wird. Das entspricht genau den Ergebnissen aus I, nach welchen den dort betrachteten Basiselementen $\overleftarrow{\beta}^\nu$, $\overleftarrow{\beta}_\nu$, $\overrightarrow{\beta}^\nu$ und $\overrightarrow{\beta}_\nu$ jeweils Fermionen und den Basiselementen $\overleftrightarrow{\beta}^\nu$ und $\overleftrightarrow{\beta}_\nu$ Bosonen zugeordnet wurden.

6. Klein-Gordon-Gleichung

Um zu einer physikalischen Interpretation der Feldgleichungen zu kommen, soll in einem ersten Schritt der einfache Fall eines freien negativen Pions betrachtet werden. Unter Beachtung der Tab. 9 aus I ist daher der folgende Ansatz zu machen:

$$\psi_{(u)} = 0\,,$$
$$\Phi_{(u)} = \varphi_{(u)}\,\beta_3\,,$$
$$\chi_{(u)} = 0\,.$$

Die Werte von $\varphi_{(u)}$ sind hierbei komplexe Zahlen. Mit (3) reduziert sich das System (5) zu

$$\sum_{\nu=0}^{3} (\partial/\partial u^\nu)\,(\partial/\partial u_\nu)\,\varphi_{(u)} = 0\,. \tag{15}$$

Nach dem Vorbild der Arbeit von Yukawa[6] erweist es sich als zweckmäßig, an Stelle der Koordinaten u^ν und u_ν der beiden Raumzeitpunkte X und Y externe und interne Koordinaten einzuführen:

$$v_0 := \tfrac{1}{2}(u^0 + u_0)\,, \qquad v_n := \tfrac{1}{2}(u^n - u_n)\,, \tag{16}$$

$$w_0 := \tfrac{1}{2}(u^0 - u_0)\,, \qquad w_n := \tfrac{1}{2}(u^n + u_n)\,. \tag{17}$$

Für den Fall, daß die beiden Punkte X und Y zusammenfallen, spezialisieren sich die Gln. (16) und (17) bei Vernachlässigung des Gravitationsfeldes und unter Verwendung der Gln. (2) aus II zu

$$v_0 = u^0, \quad v_n = u^n, \quad w_0 = 0 \quad \text{und} \quad w_n = 0\,. \tag{18}$$

Man erkennt hieran, daß die Variablen v_ν als externe und die Variablen w_ν als interne Koordinaten zu interpretieren sind. Die Gln. (18) stellen (bei Vernachlässigung des Gravitationsfeldes) die Nebenbedingungen dar, durch welche die skizzierte Theorie eines bilokalen Feldes zu einer lokalen Feldtheorie reduziert wird. Mit (16) und (17) nimmt (15) die folgende Gestalt an:

$$[(\partial/\partial v_0)^2 - \sum_{n=1}^{3} (\partial/\partial v_n)^2 - (\partial/\partial w_0)^2 + \sum_{n=1}^{3} (\partial/\partial w_n)^2]\,\varphi_{(u)} = 0\,. \tag{19}$$

Zur Trennung der externen von den internen Koordinaten bietet sich ein Produktansatz an:

$$\varphi_{(u)} = \varphi^{\text{ext}}_{(v_\nu)}\,\varphi^{\text{int}}_{(w_n)}\,.$$

Setzt man $\varphi^{\text{int}} = \varphi^{\text{int}}_{(w_n)}$ für eine reelle positive Konstante λ als Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{n=1}^{3} (\partial/\partial w_n)^2\,\varphi^{\text{int}} = (2\,\pi/\lambda)^2\,\varphi^{\text{int}} \tag{20}$$

an, so reduziert sich Gl. (19) auf die Klein-Gordon-Gleichung:

$$[(\partial/\partial v_0)^2 - \sum_{n=1}^{3} (\partial/\partial v_n)^2 + (2\,\pi/\lambda)^2]\,\varphi^{\text{ext}} = 0\,.$$

Hiermit ist der Anschluß an die lokale Feldtheorie des Pions gegeben.

Eine nur von

$$\xi := \left[\sum_{n=1}^{3} (w_n)^2\right]^{1/2}$$

abhängige Lösung der Gl. (20) wird durch die Normierungsbedingung

$$\int_{\xi=0}^{\infty} \varphi^{\text{int}}\,\bar{\varphi}^{\text{int}}\,\mathrm{d}w_1\,\mathrm{d}w_2\,\mathrm{d}w_3 = 1$$

bis auf einen komplexen Phasenfaktor η vom Betrage 1 eindeutig festgelegt:

$$\varphi^{\text{int}} = (\eta/\sqrt{\lambda}\,\xi)\,\exp\{-(2\,\pi\,\xi/\lambda)\}\,.$$

Es zeigt sich, daß die reduzierte Compton-Wellenlänge $\lambda/2\,\pi$ ein Maß für die Nichtlokalität des Pionfeldes ist.

7. Abschließende Bemerkungen

Das Ergebnis des letzten Abschnitts führt zu der Vermutung, daß das ungelöste Problem der rein theoretischen Berechnung der Elementarteilchenmassen erst dann erfolgreich behandelt werden kann, wenn man die Wechselwirkung der Elementarteilchen mit Hilfe einer bilokalen Feldtheorie beschreibt. Eine Möglichkeit dazu bietet die Gl. (4), welche ausführlich geschrieben ein System von 24 nichtlinear miteinander gekoppelten Differentialgleichungen darstellt. Die Kopplung dieser Gleichungen wird durch das auf der rechten Seite der Gl. (4) stehende Glied $A_{(u)}\,A_{(u)}$ erzwungen. Da in I gezeigt wurde, daß die Regeln, welche bei der Bildung des Produktes von $A_{(u)}$ mit sich zu verwenden sind, den Gesetzen entsprechen, nach denen 24 ausgewählte Teilchen miteinander reagieren, liegt die Vermutung nahe, daß die Gl. (4) neben den raumzeitlichen Eigenschaften der Elementarteilchen auch deren interne Symmetrien beschreibt.

Schließlich soll noch auf die mögliche Lösung eines Problems hingewiesen werden, welches in der relativistischen Quantentheorie der „Stränge“ (relativistic quantum strings) entstanden ist. Von Rebbi[7] wird unter recht allgemeinen Voraussetzungen gezeigt, daß der als Grundlage dieser Theorie zu wählende Raum neben den raumzeitlichen Dimensionen genau 24 weitere Dimensionen haben muß. Es liegt daher der Gedanke nahe, daß die in (4) zusammengefaßten 24 Differentialgleichungen einen feldtheoretischen Zugang zur Theorie der Stränge liefern.

Damit erhielte die in dieser Theorie noch nicht interpretierbare Anzahl 24 über die in I erzielten Ergebnisse eine unmittelbar einsichtige Bedeutung.

[1] F. Vollendorf, Cayley-Zahlen und Erhaltungsgesetze für Elementarteilchen, Z. Naturforsch. **30 a**, 431 [1975].

[2] F. Vollendorf, Gravitation und bilokale Feldtheorie, Z. Naturforsch. **30 a**, 642 [1975].

[3] F. Ardalan u. G. N. Fleming, A Spinor Field Theory on a seven-dimensional Space of the Poincaré Group, J. Math. Phys. **16**, No. 3, 478 [1975].

[4] A. G. Kurosch, Vorlesungen über allgemeine Algebra, Teubner-Verlag, Leipzig 1964.

[5] H. Braun u. M. Koecher, Jordan-Algebren, Springer-Verlag, Berlin 1966.

[6] H. Yukawa, Quantum Theory of non-local Fields, Phys. Rev. **77**, 219 [1950].

[7] C. Rebbi, Dual Models and Relativistic Quantum Strings, Phys. Reports **12 C**, 1 [1974].